كل متتالية تسعى نحو عدد محدود تسمى متتالية متقاربة من هنا العدد .

كل متتالية ليست متقاربة تسمى متتالية متباعدة

المتتالية المتباعدة لا تسعى نحو عدد محدود

فأما أن تسعى نحو اللانهاية أو لا تمتلك نهاية معينة .

أمثلة .

$X_n = (-1)^n$: $-1, 1, -1, 1 \ldots$

$X_n = \{1 + (-1)^n\}$: $0, 2, 0, 2$

$X_n = \{n^2\} \longrightarrow \infty$

$$X_n = \frac{3n^2 + 5n}{8n^2 + 3n - 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{3}{8}$$

المتتالية المحدودة وغير المحدودة :

- إذا كانت المتتالية X_n محدودة من الأدنى ومن الأعلى نقول أن X_n محدودة أي : $a < x_n < b$
- إذا لم تكن المتتالية X_n محدودة من الأدنى ومن الأعلى تكون غير محدودة
- كل متتالية متقاربة تكون محدودة والعكس غير صحيح بالضرورة
- كل متتالية غير محدودة تكون متباعدة
- كل متتالية تسعى إلى اللانهاية تسمى لا متناهية بالكبر

Scanned by CamScanner

جداء متتاليتين احداهما صفرية والاخرى محدودة هو متتالية صفرية.

جداء متتاليتين صفريتين هي **متتالية صفرية**

$\frac{\sin n}{n} = \sin n \cdot \frac{1}{n}$ (صفرية)

الا متتالية متقاربة من الصفر تسمى صفرية.

ملاحظات هامة:

$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty \quad : a > 1$

$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \quad : a < 1$

$\lim \sqrt[n]{n} = 1 \quad , \quad \lim \sqrt[n]{a} = 1$

$\lim \frac{n^p}{a^n} = 0 \quad : a > 1$ عندما $, \quad \lim \frac{a^n}{n^p} = \infty$

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad , \quad \lim \left(1 + \frac{a}{n}\right) = e^a$

مبرهنة المتتاليات والشرث:

لتكن $[z_n], [y_n], [x_n]$

ثلاث متتاليات تحقق: $a_n \leq y_n \leq z_n$

إذا كانت المتتاليات x_n, z_n متقاربتين من عدد واحد تكون متتالية y_n متقاربة من نفس العدد.

احسب نهاية المتتالية في كل من الحالات الآتية:

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 5n + 3}{n + 8} \to \infty$ متباعدة

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 3n + 3}{n^5 + 6} \to 0$ متقاربة

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5n + 6}{5n^2 + 1} \to \frac{3}{5}$ متقاربة

4) $\frac{n^3}{2n^2+3} + \frac{1 - 2n^2}{4n+1}$
$(4n+1) \quad (2n^2+3)$
$\Rightarrow \frac{4n^4 + n^3 + 2n^2 + 3 - 4n^4 - 6n^2}{(2n^2+3)(4n+1)} = \frac{1}{8}$ متقاربة

Scanned by CamScanner

تمارين حل جمل خطية:

مثال (٣): حل بطريقة غاوس:

$$x + y + z + w = 10$$
$$2x + 3y - z + 2w = 13$$
$$-x - y - z + 3w = 6$$
$$4x + 4y + 2z = 5$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 13 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 + R_1 \to R_3 \\ R_4 - 4R_1 \to R_4}]{R_2 - 2R_1 \to R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -35 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 16 \end{array}\right)$$

$$r = r' \Rightarrow 4w = 16 \Rightarrow \boxed{w = 4}$$
$$-2z - 16 = -35 \Rightarrow \boxed{z = \frac{19}{2}}$$
$$y - \frac{57}{2} = -7 \Rightarrow \boxed{y = \frac{43}{2}}$$
$$x + \frac{43}{2} + \frac{19}{2} + 4 = 10 \Rightarrow \boxed{x = -25}$$

$$S = \left\{\left(-25, \frac{43}{2}, \frac{19}{2}, 4\right)\right\}$$

مثال (٥):

$$x + 4y = 6$$
$$2x + 5y = 7$$
$$3x + 7y = 8$$

Scanned by CamScanner

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & | & 5 \\ 2 & 5 & | & 7 \\ 3 & 7 & | & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - 3R_1 \to R_3]{R_2 - 2R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & | & 5 \\ 0 & -3 & | & -3 \\ 0 & -5 & | & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2 \to R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & | & 5 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & -5 & | & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{5R_2 + R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & | & 5 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & -2 \end{pmatrix} \quad r \neq r'$$

[illegible]

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 2 \\ 2x + y - 2z = -1 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x + 6y - 12z = -6 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & | & 2 \\ 2 & 1 & -2 & | & -1 \\ 3 & -1 & 2 & | & 1 \\ 2 & 6 & -12 & | & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3 - 3R_1 \to R_3 \\ R_4 - 2R_1 \to R_4}]{R_2 - 2R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & | & 2 \\ 0 & 5 & -10 & | & -5 \\ 0 & 5 & -10 & | & -5 \\ 0 & 10 & -20 & | & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 - 2R_2 \to R_4]{R_3 - R_2 \to R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & | & 2 \\ 0 & 5 & -10 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad r = r' < n$$

$$5y - 10z = -5$$

$$\boxed{y = 2z - 1}$$

$$x - 4z + 2 + 4z = 2$$

$$\boxed{x = 0} \quad , \quad S = \{(0, 2z - 1, z) \; z \in \mathbb{R}\}$$

Scanned by CamScanner

[illegible]

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2Z-1 \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + Z\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- أوجد حل الجملة الخطية التالية بالنسبة لـ α مستخدماً طريقة غاوس:

$$\begin{cases} x + y + 3Z = 1 \\ x + (\alpha-2)y + \alpha Z = 2 \\ x - y + \alpha Z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha-2 & \alpha & 2 \\ 1 & -1 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & (\alpha-2)-1 & \alpha-3 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \alpha-3 & \alpha-3 & 1 \\ 0 & -2 & \alpha-3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 - R_3 \to R_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \alpha-3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha \neq 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \alpha-3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 + 2R_2 \to R_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-3 & 1 \end{pmatrix}$$

شرط $\alpha \neq 3$

$$Z = \frac{1}{\alpha-3}, \quad y = 0$$

$$x + \frac{3}{\alpha-3} = 1 \Rightarrow$$

$$x = \frac{\alpha-6}{\alpha-3}$$

Scanned by CamScanner

برهن : أن المتجهات $(1,1)$, $(2,1)$ مستقلة خطياً؟

شرط الاستقلال $a(1,1) + b(2,1) = (0,0)$

$a + 2b = 0$

$a + b = 0 \implies b = 0 \,,\, a = 0$

لها حل وحيداً إذاً مستقلة

أو بطريقة المحددات :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

بما أن المحدد لا يساوي الصفر فهي مستقلة خطياً.

* حل المتجهات مستقلة أو مرتبطة

$(-1,0,1) \,,\, (3,2,-1) \,,\, (2,1,-1)$

$\alpha(2,1,-1) + \beta(3,2,-1) + \gamma(-1,0,1) = (0,0,0)$

$$2\alpha + 3\beta - \gamma = 0$$
$$\alpha + 2\beta = 0$$
$$-\alpha - \beta + \gamma = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & +1 & 0 \end{array}\right) R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & +1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 + R_1 \to R_3]{R_2 - 2R_1 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) R_3 + R_2 \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r = r' \neq n$

الجملة المعادلات عدد غير منتهٍ من الحلول ⟸ جملة المعادلة غير مستقلة خطياً.

Scanned by CamScanner